Frank Klinker

Grundlagen: Quadratische Gleichungen

Quadratwurzel, quadratische Ergänzung und pq-Formel

1 Einführung und Wiederholung

Als wir angefangen haben uns mit Gleichungen zu beschäftigen, haben wir uns zunächst auf eine sehr einfache Gleichungsart beschränkt: die lineare Gleichung. Eine lineare Gleichung hat z. B. die Form

$$4x = 12\,.$$

Nicht jeder Gleichung hat man sofort angesehen, dass sie linear ist. Drei wichtige Typen von Umformungen, die nötig waren, um eine Gleichung zu vereinfachen und schließlich zu lösen, waren:

Typ ⓪: Forme beide Seiten der Gleichung um (durch Ausklammern, Zusammenfassen usw.)

Typ ①: Addiere oder subtrahiere auf beiden Seiten der Gleichung eine Zahl oder ein Vielfaches einer Potenz von x, (z. B. -4 oder $+3x$ oder $+14$ oder $-12x^4$)

Typ ②: Multipliziere oder dividiere beide Seiten der Gleichung mit einer Zahl (z. B. $\cdot 13$ oder $:6$)

Wir erinnern uns daran, wie das ausführlich aussieht:

$$\begin{aligned}
3x^3 - 3x(x-1)(x+1) - x(x+4) - 7 &= x(2-x) + 8 && \big|\, ⓪ \\
3x^3 - 3x(x^2-1) - x^2 - 4x - 7 &= 2x - x^2 + 8 && \big|\, ⓪ \\
3x^3 - 3x^3 + 3x - x^2 - 4x - 7 &= 2x - x^2 + 8 && \big|\, ⓪ \\
-x - x^2 - 7 &= 2x - x^2 + 8 && \big|\, + x^2 \quad ① \\
-x - x^2 - 7 + x^2 &= 2x - x^2 + 8 + x^2 && \big|\, ⓪ \\
-x - 7 &= 2x + 9 && \big|\, - 2x \quad ① \\
-x - 7 - 2x &= 2x + 8 - 2x && \big|\, ⓪ \\
-3x - 7 &= 8 && \big|\, + 7 \quad ① \\
-3x - 7 + 7 &= 8 + 7 && \big|\, ⓪ \\
-3x &= 15 && \big|\, : (-3) \quad ② \\
-3x : (-3) &= 15 : (-3) && \big|\, ⓪ \\
x &= 5
\end{aligned}$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

2 In Schritten zur allgemeinen quadratischen Gleichung

2.1 Eine einfache quadratische Gleichung und die Quadratwurzel

Wir starten mit einer sehr einfachen Gleichung, die aber sicher nicht linear ist:

$$(1) \quad \boxed{x^2 = 121}\,.$$

Diese Gleichung ist eine **quadratische Gleichung**, da die Variable hier nicht linear vorkommt, sondern quadratisch, d. h. mit der Potenz zwei.

Diese Gleichung zu lösen fällt uns nicht schwer: Wir müssen "nur" nach einer Zahl suchen, die mit sich selbst multipliziert 121 ergibt.

Hier fällt einem als Lösung sofort die 11 ein, denn $11 \cdot 11 = 11^2 = 121$.

Wir erinnern uns jetzt daran, dass beim Quadrieren das Vorzeichen der Zahl keine Rolle spielt. Deshalb finden wir direkt eine zweite Lösung, nämlich die -11. Auch das überprüfen wir: $(-11) \cdot (-11) = (-11)^2 = 121$.

Wir haben also zwei Lösungen ± 11 der Gleichung $x^2 = 121$ gefunden.

Ob in der obigen Gleichung nun 121 steht oder eine andere Zahl, macht die Suche nach der Lösung höchstens rechnerisch aufwändiger, aber die Idee bleibt die gleiche.

Weil wir das ständig machen werden, bekommt die Suche nach den Lösungen der Gleichung $x^2 = c$ einen eigenen Namen:

> **Die Quadratwurzel**
>
> Ist c eine Zahl, dann ist $\sqrt{c}$ die nicht-negative Zahl, welche mit sich selbst multipliziert c ergibt.
>
> $\sqrt{c}$ heißt **die Quadratwurzel aus** c (oder kürzer: Wurzel aus c).
>
> Mit dieser Schreibweise ist $\sqrt{c}$ eine Lösung der Gleichung $x^2 = c$.
>
> Da keine Zahl mit sich selbst multipliziert kleiner als Null sein kann, sieht man direkt, dass es die Wurzel aus einer negativen Zahl nicht geben kann. Das liefert uns:
>
> $$\text{Die Gleichung } x^2 = c \text{ hat } \begin{cases} \text{die Lösungen } x = \sqrt{c} \quad \text{und} \quad x = -\sqrt{c}\,, & \text{falls } c > 0 \\ \text{die Lösung } x = 0\,, & \text{falls } c = 0 \\ \text{keine Lösung}\,, & \text{falls } c < 0 \end{cases}$$

In den folgenden Beispielen nutzen wir die Wurzel, um die Lösung der quadratischen Gleichung aus dem obigen Beispiel systematisch aufzuschreiben:

Beispiel 1. • Wir suchen die Lösungen der Gleichung $x^2 = 625$:

$$\begin{aligned} x^2 &= 625 && \big|\sqrt{} \\ x &= \sqrt{625} \;\text{ oder }\; x = -\sqrt{625} \\ x &= 25 \;\text{ oder }\; x = -25 \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung sind also ± 25.

• Wir suchen die Lösungen der Gleichung $x^2 = 60$:

$$\begin{aligned} x^2 &= 60 && \big|\sqrt{} \\ x &= \sqrt{60} \;\text{ oder }\; x = -\sqrt{60} \\ x &\approx 7{,}746 \;\text{ oder }\; x \approx -7{,}746 \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung sind also $\pm\sqrt{60} \approx \pm 7{,}746$.

Wenn die Wurzel einer Zahl nicht als Bruch oder ganze Zahl darstellbar ist, dann kann man als "exaktes"' Ergebnis den Wurzelausdruck wie in Beispiel b) einfach stehen lassen.

2.2 Variationen der einfachen Gleichung

Wir sehen uns einige weitere Beispiele quadratischer Gleichungen an, die unserer ersten sehr ähneln

(2) $\boxed{x^2 - 32 = -7}$

(3) $\boxed{12x^2 = 192}$

(4) $\boxed{-3x^2 + 115 = 7}$

Diese Gleichungen lassen sich sehr einfach in die noch einfacherer Form überführen. Dazu bedenken wir, dass wir sie erst mit Hilfe von ⓪, ① und ② umformen dürfen.

Wir führen das an den Beispielen durch:

Beispiel 2. (2) Wir suchen die Lösungen der Gleichung $x^2 - 32 = -7$:

$$\begin{aligned} x^2 - 32 &= -7 && \big| + 32 \\ x^2 &= 25 && \big|\sqrt{} \\ x &= \sqrt{25} \;\text{ oder }\; x = -\sqrt{25} \\ x &= 5 \;\text{ oder }\; x = -5 \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung sind also ± 5.

(3) Wir suchen die Lösungen der Gleichung $12x^2 = 192$:

$$\begin{aligned} 12x^2 &= 192 && \mid :12 \\ x^2 &= 16 && \mid \sqrt{} \\ x &= \sqrt{16} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{16} \\ x &= \ 4 \text{ oder} \quad x = -4 \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung sind also ± 4.

(4) Wir suchen die Lösungen der Gleichung $-3x^2 + 115 = 7$:

$$\begin{aligned} -3x^2 + 115 &= 7 && \mid -115 \\ -3x^2 &= -108 && \mid :(-3) \\ x^2 &= 36 && \mid \sqrt{} \\ x &= \sqrt{36} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{36} \\ x &= \ 6 \text{ oder} \quad x = -6 \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung sind also ± 6.

Wir gehen noch einen Schritt weiter und sehen uns eine "sehr komplizierte" Gleichung an:

(5) $\boxed{7(x+4)^2 - 100 = -37}$

Wenn man genau hinsieht, dann unterscheidet diese Gleichung sich von der Gleichung (4) nur dadurch, dass das x "nicht alleine steht", sondern in der Form $(x+4)$. Deshalb beginnen wir auch genauso, wie bei der Lösung von (4):

Beispiel 3. (5) Wir suchen die Lösungen der Gleichung $7(x+4)^2 - 100 = -37$:

$$\begin{aligned} 7(x+4)^2 - 100 &= -37 && \mid +100 \\ 7(x+4)^2 &= 63 && \mid :7 \\ (x+4)^2 &= 9 && \mid \sqrt{} \\ x+4 &= \sqrt{9} \quad \text{oder} \quad x+4 = -\sqrt{9} \\ x+4 &= \ 3 \text{ oder} \quad x+4 = -3 && \mid -4 \\ x &= -1 \quad \text{oder} \quad x = -7 \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung sind also -1 und -7.

Die Scheitelpunktform einer quadratischen Gleichung

Alle Beispiele (1)-(5) waren bis auf einfache Umformung Spezialfälle der quadratischen Gleichung

$$\boxed{a(x-x_s)^2 + y_s = 0}.$$

Dabei sind a, x_s und y_s feste Zahlen.

Diese spezielle Form heißt **Scheitelpunktform**.

- In (1) ist $a = 1$, $x_s = 0$ und $y_s = -121$
- In (2) ist $a = 1$, $x_s = 0$ und $y_s = -25$
- In (3) ist $a = 12$, $x_s = 0$ und $y_s = -192$
- In (4) ist $a = -3$, $x_s = 0$ und $y_s = 108$
- In (5) ist $a = 7$, $x_s = -4$ und $y_S = -63$

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass wir jede quadratische Gleichung in die Scheitelpunktform bringen können.

2.3 Die allgemeine quadratische Gleichung und die quadratische Ergänzung

Wir sehen uns nochmal die Gleichung (5) an und Klammern aus:

$$\begin{aligned}
7(x+4)^2 - 100 &= -37 &&\Big|\textcircled{0}\ \big(\text{Binomische Formel}\big)\\
7(x^2+8x+16) - 100 &= -37 &&\Big|\textcircled{0}\ \big(\text{ausklammern}\big)\\
7x^2 + 56x + 112 - 100 &= -37 &&\Big|\textcircled{0}\ \big(\text{zusammenfassen}\big)\\
7x^2 + 56x + 12 &= -37 &&\Big|+37\\
7x^2 + 56x + 49 &= 0
\end{aligned}$$

Man kann jede quadratische Gleichung aus der Scheitelpunktform in so eine "sehr aufgeräumte" Form überführen. Deshalb bekommt die einen eigenen Namen:

Die Normalform einer quadratischen Gleichung

Eine quadratische Gleichung lässt sich immer in der Form

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

schreiben. Dabei sind a, b und c feste Zahlen.

Diese Darstellung einer quadratischen Gleichung heißt **Normalform**.

Um so eine quadratische Gleichung in Normalform zu lösen, können wir die Rechnung von oben rückwärts machen. Dadurch überführen wir die Gleichung zunächst in die Scheitelpunktform. Anschließend können wir in Beispiel (5) vorgehen.

Um diese "Rückwärtsrechnung" machen zu können, erinnern wir uns an die binomische Formeln:

$$u^2 \pm 2\,u\,v + v^2 = (u \pm v)^2\,.$$

Damit können wir ausgehend von der Normalform die Scheitelpunktform herleiten:

$$
\begin{aligned}
& ax^2+bx+c && \text{Klammere } a \text{ aus}\\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c && \text{schreibe komplizierter}\\
&= a\left(x^2+2\,\frac{b}{2a}\,x\right)+c && \text{schreibe komplizierter durch geschicktes Ergänzen}\\
&= a\left(x^2+2\,\frac{b}{2a}\,x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c && \text{Klammere den letzten Summanden aus}\\
&= a\left(x^2+2\,\frac{b}{2a}\,x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c && \text{vereinfache den letzten Summanden}\\
&= a\left(x^2+2\,\frac{b}{2a}\,x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c-\frac{b^2}{4a} && \text{In der Klammer steht ein Binom}\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}\\
&= \underset{\substack{\uparrow\\ a}}{\boxed{a}}\left(x-\underset{\substack{\uparrow\\ x_S}}{\boxed{-\frac{b}{2a}}}\right)^2+\underset{\substack{\uparrow\\ y_S}}{\boxed{c-\frac{b^2}{4a}}}
\end{aligned}
$$

Diese etwas kompliziert aussehende Rechnung heißt **quadratische Ergänzung**. Das liegt an dem dritten Schritt, in dem man durch geschicktes Ergänzen ein Binom erhält.

Beispiel 4. a) Wir berechnen die Scheitelpunktform und Lösungen der Gleichung $2x^2-8x-42=0$:

$$
\begin{aligned}
2x^2-8x-42&=0\\
2(x^2-4x)-42&=0\\
2(x^2-4x+2^2-2^2)-42&=0\\
2(x^2-4x+4)-8-42&=0\\
2(x-2)^2-50&=0 && \text{Dies ist die SPF. Ab jetzt lösen} \quad \Big|\; +50\\
2(x-2)^2&=50 && \Big|\; :2\\
(x-2)^2&=25 && \Big|\; \sqrt{}\\
x-2=\sqrt{25}\quad &\text{oder}\quad x-2=-\sqrt{25}\\
x-2=5\quad &\text{oder}\quad x-2=-5 && \Big|\; +2\\
x=7\quad &\text{oder}\quad x=-3 && \text{Die Lösungen!}
\end{aligned}
$$

b) Wir berechnen die Scheitelpunktform und Lösungen der Gleichung $-5x^2-30x+135=0$:

$$
\begin{aligned}
-5x^2-30x+135&=0\\
-5(x^2+6x)+135&=0\\
-5(x^2+6x+3^2-3^2)+135&=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-5(x^2+6x+9)+45+135 &= 0 \\
-5(x+3)^2+180 &= 0 && \left|\begin{array}{c}\text{Dies ist die SPF.}\\ \text{Ab jetzt lösen}\end{array}\right. \quad \left| -180 \right. \\
-5(x+3)^2 &= -180 && \left| :(-5) \right. \\
(x+3)^2 &= 36 && \left| \sqrt{} \right. \\
x+3 = \sqrt{36} \quad \text{oder} \quad x+3 &= -\sqrt{36} \\
x+3 = 6 \quad \text{oder} \quad x+3 &= -6 && \left| -3 \right. \\
x = 3 \quad \text{oder} \quad x &= -9 && \left| \text{Die Lösungen!} \right.
\end{aligned}
$$

Die quadratische Ergänzung lässt sich in einem einfachen Algorithmus zusammenfassen, der uns aus der Normalform die Scheitelpunktform gibt:

> **Der "$-\frac{b}{2a}$-Algorithmus" zur quadratischen Ergänzung**
>
> Liegt die quadratische Gleichung in Normalform
>
> $$ax^2+bx+c=0$$
>
> vor, dann erhalten wir die Scheitelpunktform
>
> $$a(x-x_s)^2+y_s=0\,,$$
>
> indem wir wie folgt vorgehen:
>
> - Berechne $x_s = -\dfrac{b}{2a}$
> - Damit berechne dann $y_s = ax_s^2+bx_s+c$
> - Übernehme a

Beispiel 5. a) Wir berechnen die Scheitelpunktform von $2x^2-8x-42=0$ mit dem Algorithmus:

Es ist $a=2, b=-8$ und deshalb

$$
\begin{aligned}
x_s &= -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2\cdot 2} = 2\,, \\
y_s &= 2x_s^2-8x_s-42 = 2\cdot 2^2-8\cdot 2-42 = 8-16-42 = -50\,.
\end{aligned}
$$

Das gibt die Scheitelpunktform

$$2(x-2)^2-50=0\,.$$

Die Lösungen ergeben sich dann wie in Beispiel 4.a) zu $7; -3$.

b) Wir berechnen die Scheitelpunktform von $-5x^2-30x+135=0$ mit dem Algorithmus:

Es ist $a = -5, b = -30$, also

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-30}{2 \cdot (-5)} = -3\,,$$
$$y_s = -5x_s^2 - 30x_s + 135 = -5 \cdot (-3)^2 - 30 \cdot (-3) + 135 = -45 + 90 + 135 = 180\,.$$

Das gibt die Scheitelpunktform

$$-5(x+3)^2 + 180 = 0\,.$$

Die Lösungen ergeben sich dann wie in Beispiel 4.a) zu 3; -9.

c) Wir berechnen die Scheitelpunktform von $-x^2+8x-16 = 0$ mit dem Algorithmus:
Es ist $a = -1, b = 8$, also:

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-1)} = 4\,,$$
$$y_s = -x_s^2 + 8x_s - 16 = -4^2 + 8 \cdot 4 - 16 = -16 + 32 - 16 = 0\,.$$

Das gibt schließlich die Scheitelpunktform

$$-(x-4)^2 = 0\,.$$

Wir lösen die Gleichung:

$$\begin{aligned} -(x-4)^2 &= 0 && \Big|\, :(-1) \\ (x-4)^2 &= 0 && \Big|\sqrt{} \\ x-4 &= \sqrt{0} && \\ x-4 &= 0 && \Big|\, +4 \\ x &= 4 && \Big|\text{Hier nur eine Lösung!} \end{aligned}$$

d) Wir berechnen die Scheitelpunktform von $x^2+10x+40 = 0$ mit dem Algorithmus:
Es ist $a = 1, b = 10$, also

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \cdot 1} = -5\,,$$
$$y_s = x_s^2 + 10x_s + 40 = (-5)^2 + 10 \cdot (-5) + 40 = 25 - 50 + 40 = 15\,.$$

Das gibt die Scheitelpunktform

$$(x-5)^2 + 15 = 0\,,$$

die wir lösen:

$$\begin{aligned} (x-5)^2 + 15 &= 0 && \Big|\, -15 \\ (x-5)^2 &= -15 && \Big|\sqrt{} \\ x-5 = \sqrt{-15} \quad &\text{oder } x-5 = -\sqrt{-15} && \Big|\text{Hier \underline{keine} Lösung!} \end{aligned}$$

2.4 Ein Spezialfall und die pq-Formel

Wir sehen uns den Spezialfall einer quadratischen Gleichung an, in der $a = 1$ ist. Um diesen Fall hervorzuheben, schreiben wir p und q statt b und c:

$$x^2 + px + q = 0\,.$$

Der obige Algorithmus liefert uns für die Scheitelpunktform:

$$\underline{x_s = -\frac{p}{2}}\,.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}\underline{y_s} &= x_s^2 + px_s + q = \Big(-\frac{p}{2}\Big)^2 + p \cdot \Big(-\frac{p}{2}\Big) + q = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = -\frac{p^2}{4} + q \\ &\underline{= q - \Big(\frac{p}{2}\Big)^2}\,.\end{aligned}$$

Zusammen gibt das die Scheitelpunktform

$$\Big(x + \frac{p}{2}\Big)^2 + q - \Big(\frac{p}{2}\Big)^2 = 0\,.$$

Diese Gleichung lösen wir nun:

$$\begin{aligned}
\Big(x + \frac{p}{2}\Big)^2 + q - \Big(\frac{p}{2}\Big)^2 &= 0 && \Big|\; -q + \Big(\frac{p}{2}\Big)^2 \\
a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 &= \Big(\frac{p}{2}\Big)^2 - q && \Big|\sqrt{} \\
x + \frac{p}{2} &= \sqrt{\Big(\frac{p}{2}\Big)^2 - q} \;\text{ oder }\; x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\Big(\frac{p}{2}\Big)^2 - q} && \Big|\; -\frac{p}{2} \\
x &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\Big(\frac{p}{2}\Big)^2 - q} \;\text{ oder }\; x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\Big(\frac{p}{2}\Big)^2 - q}
\end{aligned}$$

> **Die "*pq*-Formel" zum Lösen quadratischer Gleichungen**
>
> Diese Formeln sind sehr praktisch, wenn man quadratische Gleichungen lösen möchte. Aus diesem Grund hat sie einen eigenen Namen: ***pq*-Formel**
>
> Die Lösungen der Gleichung
>
> $$x^2 + px + q = 0$$
>
> sind
>
> $$\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\Big(\frac{p}{2}\Big)^2 - q}}$$

Bemerkung 6. Ist die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ gegeben und es ist $a \neq 1$, dann kann man die pq-Formel trotzdem verwenden.
Dazu berechnet man $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ und setzt das in die pq-Formel ein.

Beispiel 7. a) Wir suchen die Lösungen von $x^2 + 8x - 48 = 0$.

Hier ist $p = 8$ und $q = -48$ und damit berechnen wir die Lösungen der Gleichung:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - (-48)} \\ &= -4 \pm \sqrt{16 + 48} \\ &= -4 \pm \sqrt{64} \\ &= -4 \pm 8 \\ x &= 4 \quad \text{oder } x = -12 \qquad \Big| \text{Die Lösungen!} \end{aligned}$$

b) Wir suchen die Lösungen von $x^2 + 10x + 40 = 0$.

Hier ist $p = 10$ und $q = 40$ und damit sind die Lösungen

$$\begin{aligned} x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 40} \\ &= -5 \pm \sqrt{25 - 40} \\ &= -5 \pm \sqrt{-15} \qquad \Big| \text{Es gibt \underline{keine} Lösung} \end{aligned}$$

c) Wir suchen die Lösungen von $-5x^2 - 30x + 135 = 0$.

Hier ist $a = -5, b = -30, c = 135$ und deshalb $p = \frac{b}{a} = \frac{-30}{-5} = 6$ und $q = \frac{c}{a} = \frac{135}{-5} = -27$. Damit berechnen wir die Lösungen der Gleichung:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - (-27)} \\ &= -3 \pm \sqrt{9 + 27} \\ &= -3 \pm \sqrt{36} \\ &= -3 \pm 6 \\ x &= 3 \quad \text{oder } x = -9 \qquad \Big| \text{Die Lösungen!} \end{aligned}$$

d) Wir suchen die Lösungen von $-x^2 + 8x - 16 = 0$.

Hier ist $a = -1, b = 8, c = -16$ und deshalb $p = \frac{b}{a} = \frac{8}{-1} = -8$ und $q = \frac{c}{a} = \frac{-16}{-1} = 16$. Mit diesen Werten erhalten wir die Lösungen der Gleichung:

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
&= -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 16} \\
&= 4 \pm \sqrt{16 - 16} \\
&= 4 \pm \sqrt{0} \\
&= -3 \pm 0 \\
x &= 4 && \Big| \text{Die einzige Lösung!}
\end{aligned}
$$